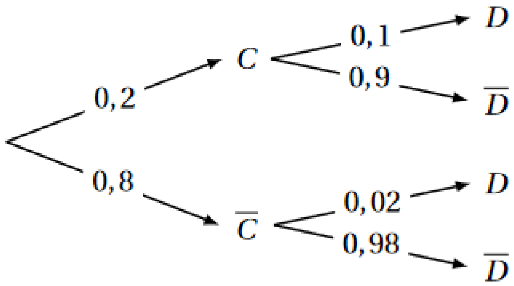
Corrigé

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. On en déduit l'arbre pondéré suivant :



1. $\text{P}(C \cap D) = \text{P}(C) \times \text{P}_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

   La probabilité d'avoir un casque contrefait présentant un défaut est donc de 0,02.

2. Les évènements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $$\begin{aligned}\text{P}(D) &= \text{P}(C \cap D) + \text{P}\left(\overline{C} \cap D\right)\\ &= 0,02 + 0,8 \times 0,02\\ &= 1,8 \times 0,02\\ &= 0,036\end{aligned}$$

   La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. On demande ici de calculer la probabilité conditionnelle : $\text{P}_D(C)$

   $\text{P}_D(C) = \dfrac{\text{P}(C \cap D)}{\text{P}(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556$ à 10^{-3} près.

Partie 2

1. **a.**
   - On a une expérience aléatoire de base (on commande un casque), pour laquelle on considère deux issues. Pour cette épreuve de Bernoulli, le succès (le casque présente un défaut) a une probabilité $p = 0,036$. (d'après la question **2.** de la **partie 1**) ;
   - On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (puisque la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
   - La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

   Ces éléments permettent de confirmer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(35\,;\,0,036)$

   b. On veut calculer $\text{P}(X = 1)$.

   $\text{P}(X = 1) = \dbinom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34} \approx 0,362$ à 10^{-3} près.

   c. Calculons : $\text{P}(X \leqslant 1) = \text{P}(X = 0) + \text{P}(X = 1) \approx 0,639$ à 10^{-3} près (à la calculatrice).

2. Ici, pour tout entier n naturel non nul, on peut créer une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,036)$.

Pour n un entier naturel non nul, la probabilité qu'un casque au moins présente un défaut sur n casques commandés est donc :

$$P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n.$$

On résout donc sur $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X_n \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,964^n \geqslant 0,99 \\ &\iff -0,964^n \geqslant -0,01 \\ &\iff 0,964^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln(0,964^n) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff n\ln(0,964) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \qquad \text{car} \ln(0,964) < 0 \end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc les solutions sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 126.

Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.